МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ПЕРЕВОЗОК С НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАКРЫТОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ

Ханов М.Р., студент,

Русинов А.А., к.ф-м.н., доцент

Бирский филиал УУНиТ, г. Бирск, Россия

Аннотация: в статье рассматривается математическое моделирование транспортных задач планирования перевозок с непрерывной закрытой математической моделью и приводится математическая модель.

Ключевые слова: математическая модель, транспортная задача, непрерывная закрытая модель.

Транспортная задача - это задача о наиболее эффективном распределении товаров или услуг между различными пунктами отправления и назначения с минимальными затратами на перевозку. Задачи такого типа возникают в различных областях, включая логистику, производство, дистрибуцию и торговлю. Они могут быть представлены в виде математической модели, которая относится к классу задач линейного программирования и может быть решена с помощью симплекс-метода или специальных методов.

Существуют несколько методов для решения транспортных задач.

1. Метод северо-западного угла заключается в заполнении клеток таблицы по порядку, начиная с левой верхней (северо-западной) клетки, и продолжается до исчерпания запасов или удовлетворения всех потребностей.

2. Метод потенциалов решения включает определение системы линейных уравнений с неизвестными и их последующее определение при заданном значении одной из переменных.

3. Метод минимального элемента заключается в заполнении клеток таблицы с наименьшими значениями тарифов на каждом шаге.

4. Метод аппроксимации Фогеля является более трудоемким, но позволяет получить начальный план перевозок, близкий к оптимальному. При его использовании находят разность между минимальными тарифами по строкам и столбцам таблицы, затем выбирают ячейку с наименьшим тарифом в предпочтительной строке или столбце. Строки поставщиков, которые полностью исчерпали возможности по отгрузке, и столбцы потребителей, потребности которых удовлетворены, вычеркиваются. [2]

Введём обозначения:

- c_{ij} – тарифы (время, расстояние) перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения;
- a_i – запасы груза в i-м пункте отправления;
- b_j – потребность в грузе в j-м пункте назначения;
- x_{ij} – количество ед. груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Математическая постановка задачи:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x_{ij}\in\Omega}, \qquad (1)$$

$$\Omega: f_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$f_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0;\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}; \qquad (4)$$

Выражение (1) представляет собой целевую функцию, которая определяет стоимость транспортировки всего груза. В процессе решения задачи необходимо найти ее минимальное значение. Переменные x_{ij} должны принимать значения, при которых целевая функция достигает минимума, и эти значения должны принадлежать допустимой области решений Ω.

Выражения (2) – (4) устанавливают границы допустимых решений Ω и называются ограничениями задачи. При этом,(2) устанавливает общие объемы груза, перевозимого из каждой отправной точки, (3) представляет общие объемы груза от всех клиентов, доставляемые в каждую точку назначения, а (4) исключает отрицательную область значений x_{ij}, куда эти переменные не могут попасть в соответствии со своим физическим значением.

Решение задачи (совокупность конкретных значений переменных x_{ij}) называется допустимым, если оно полностью удовлетворяет всем условиям задачи, и оптимальным, если является допустимым и обеспечивает минимум целевой функции. Функции y, f_1, f_2, ..., f_{m+n} представляют собой непрерывные линейные функции, определенные на положительной части евклидова пространства E^n. Эти функции актуальны, когда груз является жидкостью, сыпучим веществом, мелкими деталями, комплектующими или мелкими неупакованными продуктами. Такой груз описывается параметрами, выражающими его вес, погонные метры, квадратные метры или объем, но не штуки, упаковку, партию и т.д.

Если суммарная потребность в грузе в пунктах назначения равна общему запасу груза в пунктах отправления, то

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (5)$$

такая модель транспортной задачи называется закрытой или сбалансированной, а сама задача является классической. Условие (5) не является отдельным ограничением в задаче, оно косвенно учитывается через ограничения (2) и (3). Для закрытой задачи ограничение (2) преобразуется в равенство.

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (6) \quad [3]$$

Пример. Четыре предприятия, производящие продукцию, могут получать сырье из трех различных мест его добычи. Потребности каждого предприятия в сырье составляют 120, 50, 190 и 110 единиц соответственно, а запасы сырья в местах его получения составляют 160, 140 и 170 единиц. Сырье может быть доставлено на каждое предприятие из любого места его добычи по известным тарифам перевозок, заданным матрицей $C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (в ус.ед.). Разработать оптимальный план перевозок, чтобы минимизировать общие затраты.

Общая потребность в сырье в пунктах назначения равна общему запасу сырья в пунктах отправления, что делает эту задачу закрытой транспортной задачей.

Перед тем, как составлять математическую модель, мы проверяем условие (6), чтобы убедиться, что задача является закрытой. Действительно, общая потребность в грузе (470 ед.) равна суммарным запасам (470 ед.). Математическая модель для данной задачи с использованием принятых обозначений (1) - (4) имеет следующий вид:

$$y = 7x_{11} + 8x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + 9x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} \to \min_{x_{ij} \in \Omega},$$

$$\Omega:\ f_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 160,$$

$$f_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140,$$

$$f_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170,$$

$$f_4 = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120,$$

$$f_5 = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50,$$

$$f_6 = x_{13} + x_{23} + x_{33} = 190,$$

$$f_7 = x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110,$$

$$x_{ij} \geq 0;\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,4}.$$

Оптимальным решением задачи является матрица значений переменных

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{bmatrix},$$

которая обеспечивает минимум целевой функции $y^* = 1330$ ус.ед.

В статье рассмотрено математическое моделирование транспортных задач планирования перевозок с непрерывной закрытой математической моделью и приведена математическая модель. Применение модели показана в примере. Применение данной модели помогает оптимизировать маршруты и сократить время доставки.

Литература:

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.; Приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А. и Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; Под ред. А.В. Гасникова. — М.: МФТИ, 2010. — 362 с. ISBN 978-5-7417-0334-2
2. Цыплакова О.Н., Цысь Ю.В., Кобылина А.В. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5-2. – С. 178-180; URL: https://top-technologies.ru/ru/article/view?id=34054 (дата обращения: 13.11.2023).
3. Самойленко Н.И. Транспортные системы большой размерности: монография / Н. И. Самойленко, А. А. Кобец, под ред. Н. И. Самойленко. – Х.: НТМТ, 2010. – 212 с.